Πανεπιστημιο Ιωαννινων
Σχολη θετικων επιστημων
Τμημα Μαθηματικων
Τομεας αλγεβρας και γεωμετριας

αναλυτικη γεωμετρια
(εξετασεις περιοδου σεπτεμβριου)
διδασκων: χρηστος κ. τατακης
τεταρτη 28 σεπτεμβριου 2016

ΘΕΜΑ 1.

(1) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}.$$

Ποια είναι η σχέση (γεωμετρικά) που συνδέει τα παραπάνω διανύσματα;

(0.5 μονάδες)

(2) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και να συμπεράνετε ότι αποτελούν μία νέα βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

(0.8 μονάδες)

(3) Έστω τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ και θεωρούμε τη διάμεσο $B\Delta$ αυτού. Θεωρούμε την ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A του τριγώνου, το μέσο E της διαμέσου $B\Delta$ και τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z. Να αποδείξετε διανυσματικά ότι:

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{BZ} \text{ και } \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EZ}.$$

(0.7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2.

Δίνονται τα σημεία $A(1,-1,2), B(0,2,2), \Gamma(-1,1,0), \Delta(1,\lambda,1) \in \mathbb{R}^3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα σημεία A, B, Γ, Δ να είναι συνεπίπεδα. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε ένα κάθετο και ένα παράλληλο επίπεδο ως προς το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία A, B, Γ, Δ.

(0.7 μονάδες)

(2) Έστω Π το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\varphi(\Pi)$ το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ όπου A', B', Γ', Δ', οι εικόνες των A, B, Γ, Δ, μέσω ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού φ του $\mathbb{R}^3$. Να προσδιοριστούν όλοι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^3$ μέσω των οποίων διατηρείται αναλλοίωτο το εμβαδό του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
Αν φ μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παριστάνει στροφή περί τον άξονα Oz κατά γωνία $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, να υπολογιστεί το εμβαδό του τετραπλεύρου $\varphi(\Pi)$.

(1.3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3.

Θεωρούμε την ευθεία

$$(\epsilon_1): \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1},\ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι παράλληλη προς το επίπεδο $(\pi): -x+y+z-1=0$.
Επιπλέον, θεωρούμε ευθεία (ϵ_2) για την οποία γνωρίζουμε, ότι διέρχεται από το σημείο $A(0,1,1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\epsilon): \{-x+2y-z-2=0,\ x+2y-2z-2=0\}$.

(1) Να προσδιοριστούν ο πραγματικός αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και η ευθεία (ϵ_2).

(0.5 μονάδες)

(2) Να προσδιορίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ϵ_1) με το επίπεδο $(\pi_*): 4x+2y+2z-1=0$ και την απόσταση του σημείου $A(1,1,2)$ από την ευθεία (ϵ_1).

(0.7 μονάδες)

(3) Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ είναι ασύμβατες και στη συνέχεια να βρεθεί η κοινή κάθετος των δύο αυτών ευθειών.

(1.3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4.

(1) Να προσδιορίσετε τη σφαίρα (Σ_1) για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι ομόκεντρη της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 125 = 0$ και εφάπτεται του επιπέδου $3x + 4y + 26 = 0$.
Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε τη σφαίρα (Σ_2) για την οποία γνωρίζουμε ότι έχει κέντρο το σημείο $K_2(2, 1, 0)$ και τέμνει το επίπεδο $(\pi) : -x + y - 1 = 0$ κατά κύκλο ακτίνας $\rho = \sqrt{23}$.

(0.7 μονάδες)

(2) Να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των σφαιρών (Σ_1) και (Σ_2).

(1.3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 5.

(1) Να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ σε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις:
$\alpha)$ $8x^2 + z^2 - 2 = 0$.
$\beta)$ $-x^2 - 2y^2 - z^2 - 4 = 4z$.
$\gamma)$ $-x^2 + 4y^2 - z^2 + 8 = 0$. Επιπλέον, να προσδιοριστεί η τομή της παραπάνω επιφάνειας με το επίπεδο $x = \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$.
$\delta)$ $-y^2 - 2z^2 + 4y - 4z + x - 8 = 0$. Επιπλέον, να προσδιοριστεί η τομή της παραπάνω επιφάνειας με το επίπεδο $y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Στις περιπτώσεις γ, δ, να σχεδιάσετε προσεγγιστικά τα γραφήματα των επιφανειών.

(1 μονάδα)

(2) Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2,\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε.
Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$2x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - 3y + 2x - 2z + \frac{1}{4} = 0.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες του κέντρου της παραπάνω επιφάνειας στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$, να τη σχεδιάσετε προσεγγιστικά.

(1.5 μονάδες)

Καλή επιτυχία !!!
